
515
G233d

DÉFINITION

DU

CALCUL QUOTIENTIEL

D'EUGÈNE GOUNELLE,

PAR L. GAUSSIN,

INGÉNIEUR HYDROGRAPHE DE LA MARINE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1876

DÉFINITION

DU

CALCUL QUOTIENTIEL

D'EUGÈNE GOUNELLE.

2974 PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

DÉFINITION

DU

CALCUL QUOTIENTIEL

D'EUGÈNE GOUNELLE,

PAR L. GAUSSIN,

INGÉNIEUR HYDROGRAPHE DE LA MARINE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

—

1876

AVERTISSEMENT.

En 1842, feu mon ami Eugène Gounelle vint me proposer d'étudier en commun un nouveau Calcul infinitésimal dont il m'apportait l'idée première. En nous laissant guider par l'analogie, il nous fut facile de développer cette idée. Malgré mes instances, Gounelle ne voulut pas publier le résultat de nos recherches.

En 1864, la mort est venue malheureusement me donner ma liberté d'action. Faisant appel à mes souvenirs, je recommençai alors le travail de 1842, en essayant de généraliser et de montrer comment on pourrait appliquer les nouveaux calculs à la Physique. Je présentai, à la même époque, ce Mémoire à l'Académie des Sciences. Aujourd'hui, je me décide à le publier, heureux de rendre encore ee nouvel hommage à la mémoire de mon ami.

DÉFINITION

DU

CALCUL QUOTIENTIEL

D'EUGÈNE GOUNELLE.

---

1. Il est naturel de considérer que les variations de la grandeur se produisent par différence : c'est ce qui résulte du sens que, dans le langage ordinaire, nous attachons aux mots *croître, augmenter*, etc., et dans le langage scientifique lui-même, à la notion de *continuité*. La suite des nombres, due évidemment à cette manière d'envisager la grandeur, n'est autre chose qu'une progression arithmétique commençant à zéro et s'élevant jusqu'à l'infini par l'addition successive d'une quantité génératrice constante ou *raison* qui est l'unité.

Outre cette manière de considérer les variations de la grandeur, on peut en concevoir une infinité d'autres, qui seront également la base d'une suite de conceptions mathématiques s'étendant depuis la numération jusqu'aux notions les plus élevées du Calcul infinitésimal. Après la variation par différence, c'est la variation par quotient qui se présente le plus naturellement à l'esprit. Nous allons d'abord nous en occuper sans entrer dans tous les développements que le sujet comporte, l'analogie permettant au lecteur de compléter les démonstrations et de déduire les conséquences les plus immédiates.

2. Dans la numération par différence, chaque nombre est égal au précédent augmenté d'une quantité génératrice constante qui est en même temps le premier nombre et que l'on a appelée *unité*. Dans la numération par quotient, chaque nombre sera égal au précédent multiplié par une quantité génératrice constante qui sera également le

premier nombre et que nous appellerons *base*. Les valeurs véritables de la suite des nombres dans la numération quotientielle ne sont évidemment que la suite des termes d'une progression géométrique, qui, dans le système ordinaire, s'écrit ainsi :

$$a, \quad a^2, \quad a^3, \quad a^4, \quad a^5, \quad \ldots,$$

bien que, dans la numération quotientielle, il suffise de la représenter par les nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad \ldots.$$

Ces seconds nombres ne sont autre chose que les logarithmes des termes correspondants de la série précédente, et prennent évidemment des significations différentes suivant la valeur du nombre a, base du système de logarithmes adopté.

Les logarithmes peuvent donc être considérés comme représentant dans la numération par quotient l'expression même des nombres auxquels ils correspondent dans la numération usuelle.

3. En adoptant également le système de numération décimale, on considérera les dizaines comme partant d'une base nouvelle dont la valeur dans la numération ordinaire sera représentée par a^{10}. De même les centaines, les mille, ... partiront de bases égales à a^{100}, a^{1000}, ... Un nombre quotientiel de plusieurs chiffres est donc le produit d'un nombre correspondant de termes ayant des bases croissant d'après une loi analogue à celle qui a présidé à la formation des diverses unités du système usuel.

4. La notion des nombres fractionnaires s'étendra, on le comprend sans peine, au système par quotient, et, outre les fractions ordinaires, nous aurons également les fractions décimales. Un nombre fractionnaire décimal sera le produit d'une suite de termes ayant des bases diminuant d'après une loi analogue à celle qui a servi à la formation des diverses unités d'ordre inférieur dans le système usuel, c'est-à-dire des dixièmes, des centièmes, des millièmes, ... En déterminant par approximation la valeur d'une quantité, chaque décimale de plus dans le système usuel est une quantité de plus en plus petite qu'il faut ajouter à la valeur précédemment déterminée : dans la numération par

quotient, chaque décimale de plus est un facteur s'approchant de plus en plus de l'unité par laquelle il faut multiplier la valeur précédemment déterminée. Il est d'ailleurs évident qu'on peut déduire immédiatement de la notion des exponentielles cette manière d'envisager les logarithmes et le sens qu'il faut attacher à leur valeur approximative, sans s'appuyer sur ces considérations de numérations de diverses sortes.

5. L'approximation quotientielle dépend donc non-seulement du nombre de décimales obtenu, mais encore de la valeur effective du nombre lui-même. On sait en effet que, dans les calculs logarithmiques, pour obtenir la même approximation numérale ordinaire, il faut d'autant moins de décimales que la caractéristique est moins élevée. Dans la pratique de la vie, l'approximation quotientielle est quelquefois suffisante. Ainsi, en comparant les chiffres de la population de divers grands États, nous n'avons que faire de les connaître à une unité près. Il n'en serait pas de même s'il s'agissait de petits villages.

6. Passons maintenant aux analogies que présenteront les opérations dans les deux systèmes.

L'addition du système usuel devient évidemment la multiplication dans le système quotientiel : cela n'a pas besoin de développement; mais on peut se demander à quoi correspondra la multiplication.

7. Soient les nombres quotientiels m et n (a^m et a^n dans le système usuel) : il faut trouver un nombre qui se compose avec a^m comme a^n est composé avec a, c'est-à-dire qu'il faut élever a^m à la puissance n. Le résultat sera a^{mn} et s'écrira mn dans le système quotientiel. C'est donc une multiplication qu'il faut faire, comme si les nombres étaient écrits dans le système usuel.

Posons

$$a^m = h \quad \text{et} \quad a^n = k;$$

d'où, dans le système logarithmique à base a,

$$m = \log h \quad \text{et} \quad n = \log k.$$

Le résultat a^{mn} pourra s'écrire à volonté $h^{\log k}$ ou $k^{\log h}$.

Ainsi, lorsque, dans le système quotientiel, il y a à faire entre deux quantités l'opération analogue à la multiplication, le résultat s'obtient

dans le système usuel en élevant une quelconque des deux quantités à une puissance représentée par le logarithme de l'autre.

L'addition étant la première opération, la multiplication la deuxième, nous appellerons $h^{\log k}$ la troisième opération.

De même que la soustraction est l'opération inverse de l'addition, la division l'opération inverse de la multiplication, il y aura une opération inverse de la troisième opération : ce sera $h^{\frac{1}{\log k}}$, et il est évident que, pas plus que dans la soustraction et la division, on ne pourra intervertir l'ordre des termes comme dans l'opération directe.

8. Si nous rentrons dans le système quotientiel, les expressions seront, pour la troisième opération directe mn, et pour l'opération inverse $\frac{m}{n}$.

En restant toujours dans ce système, il est évident que l'on peut déduire la plupart des théorèmes et des développements de l'Algèbre et de l'Analyse déjà établis dans le système usuel; mais il faut bien faire attention à l'interprétation qu'il convient de leur donner. Notons seulement que $-\infty$ du système usuel correspond à o du nouveau système, o à 1, 1 à la base a, le signe $+$ à $\times$, le signe $-$ à $:$, le signe $\times$ à « puissance logarithmique de », le signe $:$ à « puissance $\frac{1}{\text{logarithme de}}$ », etc. Notons également que le signe $\frac{0}{0}$ de l'indétermination correspond à $1^{\frac{1}{\log 1}}$. Il faut aussi ne pas perdre de vue que, les nombres ayant des valeurs différentes selon la base adoptée, les opérations donneront des résultats différant avec cette base. Déjà on aurait pu faire une remarque analogue à l'égard du système usuel dans lequel les nombres représentent des valeurs absolues différentes selon l'unité adoptée.

9. Laissons au lecteur le soin d'entrer, sur les nouvelles opérations et théories algébriques, dans tous les développements que l'analogie peut suggérer. Abordons l'exposition du nouveau Calcul infinitésimal. C'est sur la notion de continuité par quotience que ce calcul reposera. y' étant une valeur voisine de y, nous désignerons le rapport $\frac{y'}{y}$ par qy; cette expression, analogue à dy, devient égale à 1 lorsque y' devient

égal à y : nous l'appellerons quotientielle du premier ordre de y, de même que qx sera la quotientielle de la variable indépendante.

Si nous avons la fonction $y = f(x)$ et que, sur la quotientielle de y, nous fassions avec la quotientielle de x l'inverse de la troisième opération, nous aurons l'expression

$$\left(\frac{y'}{y}\right)^{\frac{1}{\log\frac{x'}{x}}} \quad \text{où} \quad qy^{\frac{1}{\log qx}},$$

qui, lorsque x' devient égal à x, affecte la forme de l'indétermination $1^{\frac{1}{\log 1}}$. C'est, on le voit, l'analogue de la dérivée différentielle; nous l'appellerons *dérivée quotientielle* ou simplement *quotientiée*, de même que la dérivée différentielle pourrait s'appeler simplement *différentiée*, le mot *dérivée* devant prendre un sens plus général que celui qu'il a eu jusqu'ici.

10. On peut, par la considération des limites, déterminer directement la valeur de la quotientiée d'un grand nombre de fonctions. Les déductions sont tout à fait analogues à celle qu'on emploie pour la différentiation. Les développements seraient même identiques, bien que les fonctions à dériver eussent des significations différentes, si l'on convenait qu'elles sont exprimées en nombres quotientiels.

11. Les nombres quotientiels sont, comme nous l'avons vu, l'expression logarithmique des nombres auxquels ils correspondent dans la numération ordinaire. Le dy écrit dans la numération quotientielle est donc l'expression logarithmique de la différentielle d'un logarithme; le nombre qui lui correspond dans la numération usuelle est $e^{\frac{dy}{y}}$ si l'on adopte le système népérien; l'expression $\frac{dy}{dx}$ écrite en numération quotientielle népérienne est par conséquent l'expression logarithmique de

$$e^{\frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}}} = e^{\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}}$$

dans la numération ordinaire.

12. La notion de continuité est évidemment inséparable de la rapidité avec laquelle la grandeur varie. Or, quand on veut exprimer la quotientiée en fonction de la différenciée, on se trouve en présence de deux ordres de continuité, la continuité par quotience et la continuité par différence. A une rapidité de variation pour l'une peut correspondre une rapidité quelconque de variation pour l'autre.

D'après cela, nous voyons que si, dans le mode de continuité différentielle, nous avons

$$y' = y + dy,$$

nous aurons pour un mode quelconque de continuité quotientielle

$$y' = y + \mu dy;$$

d'où, en employant les notations proposées,

$$qy = \frac{y + \mu dy}{y} = 1 + \frac{\mu dy}{y}.$$

Si, dans le développement de $e^{\frac{\mu dy}{y}}$, nous négligeons les puissances supérieures de dy, qy se mettra sous la forme

$$qy = a^{\frac{dy}{y}}, \quad \text{d'où} \quad \log qy = \frac{dy}{y}.$$

De même nous aurons

$$qx = a^{\frac{dx}{x}}, \quad \log qx = \frac{dx}{x}.$$

Il en résulte, comme précédemment, pour la valeur de la quotientiée Q,

$$\text{(1)} \qquad Q = qy^{\frac{1}{\log qx}} = a^{\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}} = a^{\frac{x}{y}\text{D}},$$

D représentant la différentiée; d'où

$$\text{(2)} \qquad \log Q = \frac{\log qy}{\log qx} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\,\text{D},$$

c'est-à-dire que, quelle que soit la base du système quotientiel, le logarithme de la quotientiée pris dans le système logarithmique correspondant est égal à la dérivée multipliée par le rapport de la variable indépendante à la fonction.

13. En dehors de toute considération de continuité par quotience, cette valeur du logarithme de la quotientiée pourrait s'obtenir par un simple changement de variable. Il suffirait d'écrire

$$y' = \log y \quad \text{et} \quad x' = \log x,$$

d'où

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx};$$

c'est, à part la considération des nombres quotientiels, ce que nous avions obtenu au n° **11**.

Mais cela ne nous paraît pas une raison pour faire rejeter le nouveau calcul ; *car il n'est pas indifférent de raisonner sur les quantités elles-mêmes ou sur leurs logarithmes*.

14. Nous donnons ci-après les expressions des quotientiées de plusieurs fonctions. On peut les obtenir directement ou appliquer la relation (1) :

1° $y = Ax^m, \quad lQ = m, \quad Q = e^m;$

2° $y = e^x, \quad lQ = x, \quad Q = e^x;$

La fonction e^x jouit donc de cette propriété qu'elle est à elle-même sa dérivée quotientielle et sa dérivée différentielle.

3° $y = lx, \quad lQ = \frac{1}{lx}, \quad Q = e^{\frac{1}{lx}};$

4° $y = \sin x, \quad lQ = x \cot x;$

5° $y = \sin(lx), \quad lQ = \cot(lx);$

6° $y = \tan g(lx), \quad lQ = \frac{2}{\sin(2lx)},$

. . . . , ...

15. Sans développer les analogies que le calcul quotientiel présente avec le Calcul différentiel, nous allons nous borner à énoncer quelques résultats :

1° Le logarithme de la quotientiée d'une fonction de fonction est égal au produit des logarithmes des quotientiées des fonctions intermédiaires rapportées chacune à sa variable immédiate.

2° La quotientiée d'une somme algébrique ne peut s'exprimer simplement en fonction des quotientiées de chaque partie.

3° La quotientiée d'un produit est égale au produit des quotientiées de chaque facteur. Lorsqu'un des facteurs est une constante, sa quotientiée est l'unité.

4° Soit la fonction $y = u^{lv}$; on a

$$lqy = lv\, lqu + lu\, lqv.$$

5° Nous définirons la quotientielle d'une fonction de plusieurs variables indépendantes de la manière suivante :

$$lqf = \frac{lqf}{lqx}\, lqx + \frac{lqf}{lqy}\, lqy + \ldots.$$

Il est inutile de développer ces analogies.

16. Donnons à l'égard des quotientiations successives les notations qu'il conviendra d'employer.

Posons

$$qy^{\frac{1}{lqx}} = y', \quad qy'^{\frac{1}{lqx}} = y'', \quad qy''^{\frac{1}{lqx}} = y''';$$

d'où

$$qy = y'^{lqx}, \quad qy' = y''^{lqx}, \quad qy'' = y'''^{lqx}.$$

Prenons la quotientielle de qy dans l'expression $qy = y'^{lqx}$; en remarquant que lqx peut être considéré comme constant, nous aurons

$$q(qy) = qy'^{lqx};$$

or qy' est égal à y''^{lqx}; donc

$$q(qy) = q^2y = y''^{lqx^2};$$

donc enfin

$$y'' = q^2y^{\frac{1}{lqx^2}} \quad \text{ou} \quad ly'' = \frac{lq^2y}{lqx^2};$$

on aura de même

$$y''' = q^3y^{\frac{1}{lqx^3}}, \ldots$$

Dans ces expressions, qy, q^2y, q^3y, . . . sont les symboles des quotien-

tielles successives de y, et lqx, lqx^2, lqx^3,... les puissances successives de lqx.

17. Puisque e^x a pour quotientielle la même fonction e^x, il s'ensuit que les quotientiées successives auront indéfiniment la même forme.

18. Les quotientiées successives de $y = lx$ sont

$$ly' = \frac{1}{lx}, \quad ly'' = -\frac{1}{(lx)^2}, \quad ly''' = +\frac{1.2}{(lx)^3}, \quad ly^{\text{IV}} = -\frac{1.2.3}{(lx)^4}, \ldots.$$

19. Déterminons les quotientiées successives de $y = e^{f(lx)}$.

On reconnaît immédiatement que, si $f'(\quad)$, $f''(\quad)$, ... désignent les dérivées différentielles successives de $f(\quad)$, les quotientiées successives auront pour valeurs

$$y' = e^{f'(lx)}, \quad y'' = e^{f''(lx)}, \quad y''' = e^{f'''(lx)}, \ldots.$$

20. Lorsque dans la fonction $f(x)$ on change x en $x + h$, la fonction devient $f(x + h)$ et se développe suivant les puissances ascendantes de h; nous devons donc nous attendre, en nous laissant guider par l'analogie, à trouver pour la fonction $f(xh)$, dont la valeur s'obtient en changeant x en xh, un développement analogue non plus en termes additifs, mais en facteurs. Voici ce développement, dont nous croyons inutile de donner la démonstration directe :

$$f(xh) = f(x) f'_q(x)^{\frac{lh}{1}} f''_q(x)^{\frac{lh^2}{1.2}} f'''_q(x)^{\frac{lh^3}{1.2.3}} \ldots.$$

Il est d'ailleurs évident que cette série n'est qu'une conséquence de celle de Taylor.

Soit, en effet, la fonction $y = f(x)$.

Déterminons la fonction $\varphi(x)$ de manière que la relation $e^{\varphi(lx)} = f(x)$ soit satisfaite.

D'après la série de Taylor, nous avons

$$\varphi(lx + lh) = \varphi(lx) + \frac{lh}{1}\varphi'(lx) + \frac{lh^2}{1.2}\varphi''(lx) + \ldots,$$

d'où

$$e^{\varphi(lxh)} = e^{\varphi(lx)} e^{\varphi'(lx)\frac{lh}{1}} e^{\varphi''(lx)\frac{lh^2}{1.2}} \ldots.$$

Or nous savons (n° 19) que les quotientiées successives de $f(x) = e^{(\varphi l x)}$ sont égales à $e^{\varphi'(lx)}$, $e^{\varphi''(lx)}$, .. ; donc

$$f(x, h) = f(x) f_q'(x)^{\frac{lh}{1}} f_q''(x)^{\frac{lh^2}{1.2}} \ldots$$

21. Si dans le développement de $f(xh)$ on fait x égal à 1, on obtient une série analogue à celle de Maclaurin.

$$f(x) = f(1) f_q'(1)^{lx} f_q''(1)^{\frac{lx^2}{1.2}}.$$

22. Du développement de la fonction $f(xh)$ en facteurs, on peut déduire des théorèmes analogues à ceux du Calcul différentiel pour la détermination des maxima et des minima qui ont lieu quand la quotientiée du premier ordre est égale à l'unité. Si la quotientiée du second ordre est plus petite que l'unité, il y a maximum ; minimum si elle est plus grande.

La série en facteurs étant une conséquence de la série de Taylor, on voit d'ailleurs que tous les développements que l'on peut obtenir par l'une d'elles s'obtiendraient plus ou moins facilement au moyen de l'autre.

23. Il existe évidemment un Calcul intégral quotientiel analogue au Calcul intégral différentiel. Nous nous bornerons à le définir et à établir quelques théorèmes immédiats.

Nous choisirons la lettre P pour représenter le produit d'une suite infinie de facteurs infiniment proches de l'unité. La notation de l'intégrale quotientielle sera donc

$$\mathrm{P} f_q'(x)^{lqx} = f(x).$$

24. Reprenons la relation qui lie la quotientiée à la différentiée.

$$\frac{lqy}{lqx} = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad l\mathrm{Q} = \frac{x}{y}\mathrm{D}.$$

Il résulte de cette relation que, lorsqu'on connaît la quotientiée et la différentiée d'une même fonction, on peut en déduire la valeur de la fonction elle-même. De même, quand on sait intégrer par produit ou par somme une fonction, on peut déduire la valeur de la différentiée ou de la quotientiée correspondante. Le problème de passer de la différentiée

à la quotientiée est donc du même ordre de difficulté que celui de l'intégration.

25. On sait que le logarithme de la quotientiée de $y = e^{f(lx)}$ est égal à $f'(lx)$. Il suit de là que, chaque fois qu'on sait sommer $\varphi(z)dz$ ou $\varphi(e^y)dy$, on peut trouver l'intégrale quotientielle dont le logarithme de la quotientiée est égal à $\varphi(lz)$ ou $\varphi(y)$.

26. De même, la différentiée de $y = lf(e^x)$ étant égale à $lf'_q(e^x)$, chaque fois qu'on sait trouver l'intégrale quotientielle dont le logarithme de la quotientiée est $\varphi(z)$ ou $\varphi(ly)$, on peut sommer $\varphi(e^z)dz$ ou $\varphi(y)dy$.

27. Si l'on croyait utile de choisir, pour désigner l'intégrale quotientielle, une dénomination analogue à celle de *somme*, on pourrait adopter le mot *produit*, et le verbe *produire* serait analogue au verbe *sommer*.

28. Reprenons, telle que nous l'avons établie au commencement de ce Mémoire, la suite des opérations à faire sur deux nombres a et b.

1° $$a + b,$$

2° $$a \,.\, b,$$

3° $$a^{lb} \quad \text{ou} \quad e^{la.lb}.$$

Nous voyons que, si nous prenons le logarithme du résultat de chaque opération, nous obtenons le résultat de l'opération précédente, dans laquelle les nombres sont remplacés par leurs logarithmes. Si donc nous voulons prolonger la série des opérations, la quatrième opération sera

$$e^{la^{llb}} \quad \text{ou} \quad e^{lb^{lla}},$$

ou enfin

$$e^{e^{lla.llb}},$$

dont le logarithme est $e^{lla.llb}$.

29. Nous pouvons d'ailleurs déterminer cette quatrième opération en considérant que la grandeur, au lieu de varier par différence ou par quotience, varie d'après la troisième opération. Deux nombres con-

sécutifs seront tels que, pour obtenir le second, il faudra élever le premier à la puissance logarithmique d'une quantité constante. Pour déterminer le point de départ de cette troisième numération, il faudra faire sur un même nombre l'inverse de la troisième opération, c'est-à-dire élever a à la puissance $\frac{1}{\log a}$.

Si k désigne la base logarithmique, nous aurons

$$a^{\frac{1}{\log a}} = k.$$

Donc le zéro de la numération ordinaire qui a l'unité pour correspondant dans la numération quotentielle aura pour correspondant, dans la troisième numération, la base du système de logarithmes adopté.

La suite des nombres, dans cette numération, sera représentée par les expressions suivantes écrites dans la numération ordinaire :

$$k, \quad k^{\log a}, \quad k^{(\log a)^2}, \quad k^{(\log a)^3}, \quad \ldots,$$

dont les logarithmes seront

$$1, \quad \log a, \quad (\log a)^2, \quad (\log a)^3, \quad \ldots,$$

et les logarithmes des logarithmes,

$$0, \quad \log\log a, \quad 2\log\log a, \quad 3\log\log a, \quad \ldots.$$

On pourrait laisser à a une valeur quelconque, ce qui reviendrait à considérer, pour la troisième numération, une vitesse de continuité différente de celle de la deuxième; mais, pour simplifier, nous prendrons $\log a = k$, et même nous ferons k égal à e. Les trois séries précédentes deviendront alors

$$\begin{array}{lllll} e, & e^{e^1}, & e^{e^2}, & e^{e^3}, & \ldots, \\ 1, & e^1, & e^2, & e^3, & \ldots, \\ 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots. \end{array}$$

En raisonnant sur les nombres de la troisième série, considérés comme écrits dans le troisième système de numération, nous déduirons des analogies, comme nous l'avons fait pour la numération quotientielle. On voit ainsi que l'addition de deux nombres m et n revient, lorsqu'on les transporte dans la numération ordinaire, à l'élévation de l'un à la

puissance logarithmique de l'autre; la multiplication mn sera la quatrième opération et correspond à

$$e^{e^{mn}} \quad \text{ou à} \quad e^{e^{ll a . ll b}}.$$

30. On peut déduire encore une Algèbre et un Calcul infinitésimal. Contentons-nous de définir la dérivée dans ce nouveau calcul et de donner son expression en fonction de la quotientiée et de la dérivée. Soit y' une valeur voisine de y. Pour avoir la valeur de l'expression infinitésimale analogue à qy et à dy, expression que nous désignerons par ry, il faut faire sur y' avec y l'inverse de la troisième opération. Nous aurons donc

$$ry = e^{\frac{ly'}{ly}},$$

en adoptant pour simplifier la base e.

De même on a

$$rx = e^{\frac{lx'}{lx}},$$

Faisons maintenant sur ry avec rx l'inverse de la quatrième opération; nous obtenons

$$e^{e^{\frac{llry}{llrx}}},$$

mais

$$llry = lly' - lly \quad \text{et} \quad llrx = llx' - llx;$$

donc

$$R = e^{e^{\frac{lly' - lly}{llx' - llx}}};$$

expression qui, à la limite, prend la forme

$$e^{e^{\frac{0}{0}}}.$$

Le logarithme de son logarithme est

$$llR = \frac{lly' - lly}{llx' - llx},$$

expression qu'il est plus commode de considérer quand on veut, dans chaque cas particulier, déterminer la vraie valeur de R à la limite.

31. De $y' = yqy$, nous tirons, en prenant les logarithmes,

$$ly' = ly + lqy, \quad \frac{ly'}{ly} = 1 + \frac{lqy}{ly},$$

d'où

$$lry = \frac{ly'}{ly} = 1 + \frac{lqy}{ly} = e^{\frac{lqy}{ly}},$$

en négligeant les puissances supérieures de lqy.

Prenons encore le logarithme, il vient

$$llry = \frac{lqy}{ly};$$

de même on a

$$llrx = \frac{lqx}{lx};$$

donc

(1) $$llR = \frac{llry}{llrx} = \frac{lx}{ly}\,\frac{lqy}{lqx} = \frac{lx}{ly}\,lQ.$$

Si nous remplaçons lQ par sa valeur en fonction de la différentiée D, nous aurons

(2) $$llR = \frac{x}{y}\,\frac{lx}{ly}\,D.$$

Au moyen des relations (1) et (2), on peut trouver les dérivées troisièmes des fonctions que l'on sait déjà quotientier ou différentier.

32. Cherchons la troisième dérivée de e^x au moyen de la relation (2), nous aurons

$$llR = \frac{x}{e^x}\,\frac{lx}{x}\,e^x = lx, \quad \text{d'où} \quad lR = x, \quad R = e^x.$$

Ainsi la fonction e^x jouit de cette propriété, que ses dérivées sont égales à la fonction elle-même, et cela est encore vrai pour les autres calculs infinitésimaux que l'on pourrait établir sur la suite des opérations $a + b$, ab, a^{lb}, ..., indéfiniment prolongées ([1]).

([1]) On peut également concevoir une suite indéfinie d'opérations précédant l'addition.

33. Quel que soit le mode naturel de variation d'une grandeur et le système de numération qui lui convienne naturellement, nous pouvons néanmoins la représenter dans un système de numération quelconque et lui appliquer le mode de variation que l'on voudra.

Supposons une fonction écrite dans la numération ordinaire, et faisons-la varier suivant le mode de continuité quotientielle; mais appliquons ce mode de variation à la fonction seule, tandis que la variable variera par différence. Nous voyons que, dans ce cas, l'expression $qy^{\frac{1}{dx}}$ ou $e^{\frac{lqx}{dx}}$ prend la forme $e^{\frac{0}{0}}$ à mesure que la variable prend une valeur de plus en plus approchée de x. C'est cette expression qui, à la limite, peut être appelée *dérivée quotientielle mixte* de y. De cette définition, on tirera tout un calcul direct et un calcul inverse ou intégral.

Dans ce nouveau calcul, on pourra déterminer directement les dérivées mixtes d'un grand nombre de fonctions; mais on peut aussi les déduire de la relation

$$lQ_m = \frac{lqy}{dx} = \frac{1}{y}D = \frac{1}{x}lQ,$$

dans laquelle Q_m désigne la quotientiée mixte.

Exemples de quotientiées mixtes de plusieurs fonctions :

1° $$y = a^x, \quad lQ_m = la;$$

en d'autres termes, la quotientiée mixte d'une exponentielle est constante.

2° $$y = e^{e^x}, \quad lQ_m = e^x, \quad Q_m = e^{e^x}, \quad Q''_m = e^{e^x}, \quad \ldots,$$

3° $$y = ax, \quad lQ_m = \frac{1}{x}, \quad lQ''_m = -\frac{1}{x^2}, \quad lQ'''_m = +\frac{1}{x^3}, \quad \ldots,$$

4° $$y = lx, \quad lQ_m = \frac{1}{x\,lx}.$$

34. Prenons les quotientiées mixtes successives de $y = e^{f(x)}$, nous aurons

$$lQ_m = f'(x), \quad lQ''_m = f''(x), \quad lQ'''_m = f'''(x), \quad \ldots,$$

expressions dans lesquelles $f'(x)$, $f''(x)$, ... représentent les différentiées successives de $f(x)$.

35. Dans ce calcul mixte, il y aura également un développement analogue à la série de Taylor. On peut obtenir ce développement soit directement, soit en s'appuyant sur les relations du n° 34,

$$f(x+h) = f(x)\, f'_{qm}(x)^{\frac{h}{1}}\, f''_{qm}(x)^{\frac{h^2}{1.2}}.$$

Dans cette formule $f'_{qm}(x)$, $f''_{qm}(x)$ représentent les quotientiées mixtes successives de $f(x)$.

36. Nous aurons également un Calcul intégral mixte inverse du Calcul quotientiel mixte. Les équations

$$lQ_m = \frac{D}{y}, \quad lQ_m = \frac{lQ}{x}$$

établissent les relations qui existent entre l'intégrale et les diverses dérivées.

37. Le logarithme de la quotientiée mixte de $y = e^{f(x)}$ étant égal à la différentiée de $f(x)$, il en résulte que, chaque fois qu'on sait sommer $\varphi(x)$, on peut trouver l'intégrale mixte quotientielle dont le logarithme de la quotientiée est $\varphi(x)$.

38. De même, la différentiée de $y = lf(x)$ étant égale au logarithme de la quotientiée mixte de $f(x)$, on en conclut que, chaque fois qu'on sait trouver l'intégrale mixte dont le logarithme de la quotientiée mixte est $\varphi(x)$, on peut sommer $\varphi(x)$.

39. De même qu'il y a un Calcul quotientiel mixte, il y a un Calcul différentiel mixte; ce calcul, dont la définition terminera l'exposé de ces analogies, s'emploiera lorsque, la fonction variant suivant le mode différentiel, la variable variera suivant le mode quotientiel.

40. La dérivée D_m sera la limite du rapport $\frac{dx}{lqx}$.

Nous aurons immédiatement les relations suivantes :

$$D_m = xD, \quad D_m = \frac{1}{y}\, lQ, \quad D_m = xy\, lQ_m.$$

41. Dans ce nouveau calcul, la dérivée mixte de lx est constante, celle de x^m est mx^m.... Les dérivées successives sont donc

$$mx^m, \quad m^2 x^m, \quad m^3 x^m, \quad \ldots.$$

42. Les différentiées mixtes successives de $y = f(lx)$ sont

$$f'(lx), \quad f''(lx), \quad \ldots.$$

43. Cette remarque donne le moyen de trouver la série analogue à celle de Taylor

$$f(xh) = f(x) + \frac{lh}{1} f'_m(x) + \frac{lh^2}{1.2} f''_m(x) + \ldots.$$

44. Il sera inutile d'indiquer les premières analogies du Calcul intégral mixte et du Calcul intégral ordinaire.

Disons seulement que, chaque fois qu'on sait sommer $\varphi(x)$ ou $\varphi(e^x)$, on saura trouver l'intégrale mixte de $\varphi(lx)$ ou de $\varphi(x)$.

De même, chaque fois qu'on saura trouver l'intégrale mixte de $\varphi(z)$, on saura sommer $\varphi(e^z)$.

45. On pourrait établir de nouveaux calculs d'après des modes de continuité tout à fait différents de ceux qui ont été exposés. Considérons, par exemple, un système de numération dans lequel la suite des nombres 1, 2, 3,... correspondrait effectivement à celle des arcs dont les tangentes seraient dans le système ordinaire 1, 2, 3,.... Cette nouvelle numération donnerait également lieu à une Algèbre spéciale, à un Calcul infinitésimal et même à des Calculs mixtes. Quel que soit le mode de continuité que l'on choisisse, il en résultera donc un calcul spécial; mais il est évident qu'il n'y aurait lieu d'adopter un calcul qu'autant qu'on pourrait espérer en tirer des conséquences pour le développement scientifique en général, et non pour une vaine satisfaction de curiosité.

46. On sait que ce sont les études géométriques qui ont donné naissance à l'Analyse infinitésimale et qui ont ensuite contribué à assurer ses progrès. Les différentielles ont, en effet, en Géométrie une signification naturelle, et, bien que l'on puisse concevoir un cours d'Analyse

sans applications géométriques, on sent l'aide que l'esprit trouve dans les combinaisons de notions moins abstraites que celles de la grandeur en général.

Dans l'étude rapide que nous avons faite du Calcul quotientiel, nous n'avons été guidés que par l'analogie; mais ce qui serait d'un secours peut-être plus efficace, et, dans tous les cas, d'un véritable intérêt, ce serait une représentation concrète des éléments infinitésimaux que l'on considère dans les nouveaux calculs. Il semble qu'on ne doit espérer la trouver que dans l'étude des phénomènes dont le mode naturel de variation a du rapport avec le mode de continuité des nouveaux calculs.

D'un côté, nous voyons que l'étendue, le mouvement, le temps s'accordent mieux avec l'ancien mode de variation par différence qu'avec tout autre. Leurs valeurs sont comptées à partir d'un point arbitraire qui est le zéro; elles marchent dans un sens vers l'infini positif; dans l'autre, vers l'infini négatif.

Il est, au contraire, des phénomènes dont la notion s'allie moins bien avec ce mode de variation par différence. La pression d'un gaz, par exemple, se conçoit comme variant, non point à partir de zéro, mais à partir d'un certain état qui peut être choisi arbitrairement pour représenter l'unité de pression; il est naturel de rapporter ces variations à la pression déjà existante. La continuité quotientielle se présente donc comme répondant mieux à l'expression de ses diverses valeurs.

En effet, une pression négative n'a pas de sens pas plus qu'un nombre quotientiel négatif, tandis qu'une pression nulle est, comme l'infini négatif des phénomènes variant par différence, un état auquel un gaz n'arrive jamais tout en pouvant s'en approcher de plus en plus: cet état se trouvera naturellement représenté par le zéro de la numération quotientielle.

Il en est de même du calorique, de l'élasticité et des phénomènes physiques en général.

47. Les nouveaux calculs viendront-ils faciliter l'étude mathématique de la Physique, du moins de quelques-unes de ses branches? Quelques inductions semblent le faire espérer.

On sait la part que l'observation et les habitudes de la vie ont eues sur la constitution de la science de la grandeur. C'est parce que la notion

de nombre a été tirée de l'observation journalière faite sur les objets qui nous entourent et sur nous-mêmes que nous avons adopté la numération ordinaire. Si, en effet, un être intelligent pouvait exister au milieu de phénomènes variant seulement par rapport, c'est le système de numération quotientiel qui serait pour lui le système naturel ; mais une pareille hypothèse est tellement loin de la réalité que son énoncé seul choque les habitudes de notre esprit. Quoi qu'il en soit, ayant d'abord adopté la numération ordinaire pour les phénomènes variant par différence, nous l'avons appliquée à tous les autres phénomènes, quels que soient leurs modes naturels de variation. C'est ainsi que nous-mêmes, dans l'exposé des nouveaux calculs, nous avons écrit les grandeurs dans le système ordinaire.

Jusqu'à présent, le seul mode de continuité qui ait été appliqué aux divers phénomènes a été le mode différentiel ; mais il est évident qu'il serait plus simple de choisir le mode de continuité naturel au phénomène que l'on étudie.

Par exemple, il est certain que l'application du Calcul quotientiel à la Géométrie serait d'une difficulté insurmontable. Par suite de la liaison qui existe entre le Calcul quotientiel et le Calcul différentiel, les résultats analytiques obtenus directement au moyen d'un calcul peuvent, il est vrai, par des transformations, passer dans l'autre calcul. Ceux dont on a besoin en Géométrie pourraient, pour la plupart sinon tous, s'établir directement au moyen du Calcul quotientiel, comme ils l'ont été au moyen du Calcul différentiel. La dérivation différentielle, qui résout le problème des tangentes, peut se déduire de la dérivation quotientielle obtenue d'abord.... La difficulté de l'application du Calcul quotientiel à la Géométrie ne serait donc pas une difficulté analytique. Elle provient de ce que l'élément infinitésimal lqx ou $\frac{dx}{x}$ n'a pas de représentation simple en Géométrie.

Dans l'application que l'on fait de l'Analyse infinitésimale différentielle à quelques questions de Physique ne se présente-t-il pas des difficultés analogues ? Lorsque le phénomène varie naturellement par quotience, convient-il de considérer pour la mise en équation du problème un élément différentiel ? Il est donc permis de supposer que les nouveaux calculs viendront résoudre la difficulté.

48. Prenons pour exemple la loi de Mariotte.

Considérons que la continuité naturelle au volume et à la pression d'un gaz soit la continuité quotientielle; car, de même que pour la pression, la limite inférieure asymptotique du volume d'un gaz est zéro et non l'infini négatif; en outre, il est naturel de rapporter les volumes comme les pressions à un état choisi arbitrairement, qui est l'unité, et non à un point zéro.

Le volume et la pression d'un gaz auront donc pour éléments infinitésimaux naturels lqy et lqx ou $\frac{dy}{y}$ et $\frac{dx}{x}$, c'est-à-dire les rapports de l'accroissement de chaque variable à la valeur de cette variable. La loi de Mariotte revient à dire que ces éléments sont égaux, mais de signes contraires, ou que la somme des valeurs de y et de x dans la numération quotientielle est constante. On voit par là comment la loi déjà si simple de Mariotte prend une expression plus simple encore.

Supposons qu'on soit arrivé par l'expérience ou par la théorie à poser, tout d'abord, l'équation infinitésimale

$$l\mathrm{Q} = \frac{lqy}{lqx} = -1.$$

L'intégration aurait donné immédiatement $xy = \mathrm{A}$.

Si l'on compare l'équation quotientielle à l'équation différentielle, la simplification est encore plus grande, puisque, au lieu de $\frac{lqy}{lqx} = -1$, on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}.$$

49. Tant que l'on recherche les lois qui relient entre eux des phénomènes variant suivant un même mode de continuité, soit par différence, soit par quotience, il y aura donc lieu d'appliquer le Calcul différentiel ou le Calcul quotientiel.

Mais l'uniformité dans le mode de continuité n'a pas toujours lieu; le contraire arrive même souvent dans l'étude des phénomènes physiques. Bien que l'on puisse étudier la pression en fonction de l'élasticité, la chaleur en fonction de la pression, etc., c'est-à-dire considérer des phénomènes variant naturellement par quotience, on a souvent aussi

à tenir compte du temps. Or le mode de continuité naturel à la notion du temps est le mode différentiel. Si donc, pour avoir une représentation concrète satisfaisante de l'élément infinitésimal, nous considérons l'élément quotientiel pour le phénomène physique, il faudra, d'un autre côté, continuer à employer l'élément différentiel pour le temps. Le Calcul quotientiel mixte, défini plus haut, trouvera alors naturellement son application. Nous allons en donner un exemple à l'égard de la loi du refroidissement dans le vide.

50. Newton, guidé par des idées théoriques, avait supposé que cette loi était représentée par la fonction $y = ae^{-mt}$. Elle revient à dire que la vitesse du refroidissement est proportionnelle à l'excès de la température. Cette loi ne se vérifie pas lorsqu'on prend le nombre de degrés d'un thermomètre comme mesure de la chaleur. Considérons-la néanmoins comme une représentation hypothétique qui lie la chaleur, quel que soit son mode de mesure thermométrique avec le temps. Puisque la continuité différentielle ne s'applique pas naturellement à la chaleur, supposons que la continuité quotientielle lui convienne. L'élément infinitésimal $\frac{dy}{y}$ représentera le rapport de la variation de la température à la valeur de cette température. Le rapport de cet élément à l'élément différentiel du temps sera la vitesse du refroidissement, telle qu'il paraît naturel de la définir d'après le mode de variation de la chaleur. C'est le rapport de la vitesse absolue du refroidissement à la valeur de la température. C'est ce qu'on pourrait appeler « vitesse relative » si cette expression n'avait pas déjà une signification bien connue. Nous proposerons de l'appeler « vitesse rapportée », en sous-entendant « à la valeur de la fonction », ou simplement « vitesse quotientielle ». D'après la formule hypothétique $y = ae^{-mt}$, cette vitesse quotientielle, qui n'est autre chose que le logarithme de la quotientiée mixte, est constante. Bien que la loi du refroidissement supposée par Newton fût d'une expression très-simple, puisqu'elle est celle de la proportionnalité à la température, on reconnaîtra que la loi de constance présente un degré de simplicité de plus. Ce qu'il convient de conclure de l'application hypothétique précédente, c'est la possibilité des simplifications par l'emploi des nouveaux calculs, et en même temps celle de la représentation concrète de l'expression quotientielle lqy.

51. Après avoir supposé une loi préliminaire servant, dans des limites restreintes, à calculer la vitesse du refroidissement, Dulong et Petit sont arrivés à trouver l'expression de cette vitesse, qui se trouve représentée, lorsque le refroidissement a lieu dans le vide, par la formule

$$V = ma^{\tau}(a^{\theta} - 1), \tag{1}$$

dans laquelle m et a sont des constantes, τ la température de l'enceinte maintenue constante, et θ l'excès de la température du corps qui se refroidit sur la température de l'enceinte.

Les températures sont mesurées sur le thermomètre à air; mais il est permis de supposer que la continuité quotientielle convient naturellement à la chaleur, et ne peut-on pas se demander si, pour étudier les variations de la chaleur en fonction du temps, il n'est pas préférable de la mesurer par un de ses effets variant en progression géométrique, lorsqu'on considère que, dans le thermomètre ordinaire, la dilatation varie en progression arithmétique? Pour cela, nous n'avons qu'à supposer un thermomètre dont la graduation sera telle que l'expression numérique des nouvelles températures sera une exponentielle du nombre des degrés ordinaires comptés à partir d'un point à déterminer convenablement. Même en dehors de toute considération *a priori*, rien n'empêche de choisir un pareil thermomètre pour mesurer la température. Les nouveaux degrés seront liés aux anciens par la relation $y = a^t$, le nombre a ayant la même valeur que dans la formule de Dulong.

Soit y_τ la nouvelle température correspondant à τ, d'où

$$y_\tau = a^\tau.$$

Soit $y_{\tau+\theta}$ la nouvelle température correspondant à $\tau + \theta$, d'où

$$y_{\tau+\theta} = a^{\tau+\theta}.$$

Par suite, l'expression (1) peut se transformer ainsi

$$V = ma^\tau(a^\theta - 1) = m(y_{\tau+\theta} - y_\tau).$$

Voyons maintenant ce que deviendra l'expression de la vitesse d'après le nouveau système de graduation.

De $y = a^{\mathrm{T}}$, on tire, si x représente le temps,

$$\frac{dy}{dx} = la\,a^{\mathrm{T}}\frac{d\mathrm{T}}{dx} = la\,y\frac{d\mathrm{T}}{dx};$$

par conséquent

$$\mathrm{V} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\mathrm{T}}{dx} = \frac{1}{la}\,\frac{\frac{dy}{y}}{dx} = \frac{1}{la}\,\frac{lqy}{dx} = \frac{1}{la}\,l\mathrm{Q}_m.$$

Ce résultat est digne de remarque, parce qu'il nous donne une représentation physique immédiate de l'élément infinitésimal lqy, puisque ce n'est autre chose, à un facteur près, que la différentielle de la température θ comptée sur un thermomètre ordinaire. On y trouve également une confirmation de l'utilité de la définition de la vitesse quotientielle.

En se servant du nouveau thermomètre, on peut donc dire que la vitesse quotientielle du refroidissement est proportionnelle à l'excès de la température. Nous arrivons donc, par l'application convenable des divers modes de continuité, à une expression simple pour la loi du refroidissement, et cette expression est précisément celle de la loi de Newton qu'il convient de modifier seulement dans l'interprétation.

On sait que Dulong et Petit ont trouvé pour le nombre a la même valeur, quelles que soient la température de l'enceinte et la nature de la surface refroidissante; c'est, en effet, ce qui est nécessaire pour permettre de faire la transformation de la loi.

52. Les exemples précédents, s'appuyant sur des lois déjà établies, ne peuvent être considérés comme une application des nouveaux calculs. Ils n'ont été donnés que pour montrer la possibilité de la représentation concrète des nouveaux éléments infinitésimaux, et encore faut-il ajouter qu'ils se bornent aux éléments du premier ordre. Il serait bien à désirer que l'on pût trouver une signification pour ceux du second.

53. Dans les calculs mixtes, il n'a pas été question des fonctions à plusieurs variables indépendantes. Il y aurait lieu, cependant, d'entrer dans des développements à cet égard, puisque, chaque variable pouvant varier suivant un mode de continuité différent, il en résultera un calcul

mixte pour chaque combinaison possible. Convient-il, par exemple, lorsqu'on étudie les lois de la distribution de la chaleur dans les corps, d'avoir recours à un calcul mixte dans lequel la chaleur varierait suivant le mode quotientiel d'une part, et les coordonnées géométriques et le temps d'autre part, suivant le mode différentiel? Avant de répondre à cette question, il faut attendre que l'on sache s'il y a vraiment utilité à employer les nouveaux calculs dans des cas moins compliqués.

54. Donnons comme appendice à ce Mémoire la définition du calcul aux quotiences finies.

Nous adopterons la lettre Λ pour désigner la quotience.

Posons

$$(1) \qquad \frac{u_1}{u} = \Lambda u, \qquad \frac{u_2}{u_1} = \Lambda u_1, \qquad \ldots, \qquad \frac{u_n}{u_{n-1}} = \Lambda u_{n-1},$$

$$(2) \qquad \frac{\Lambda u_1}{\Lambda u} = \Lambda^2 u, \qquad \frac{\Lambda u_2}{\Lambda u_1} = \Lambda^2 u, \qquad \ldots, \qquad \frac{\Lambda u_n}{\Lambda u_{n-1}} = \Lambda^2 u_{n-1}.$$

En appliquant ces notations, on aura

$$(3) \qquad \Lambda\left(\frac{u, v}{w}\right) = \frac{\Lambda u . \Lambda v}{\Lambda w};$$

d'où

$$(4) \qquad \Lambda(u^m) = (\Lambda u)^m,$$

$$(5) \qquad u_n = u(\Lambda u)^{\frac{n}{1}} (\Lambda^2 u)^{\frac{n(n-1)}{1.2}} (\Lambda^3 u)^{\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}},$$

ou, en prenant le logarithme,

$$\log u_n = \log u + \frac{n}{1} \log \Lambda u + \frac{n(n-1)}{1.2} \log \Lambda^2 u.$$

Ce développement peut s'écrire sous la forme symbolique

$$(6) \qquad \log u_n = \log \times (1 + \Lambda)^n u;$$

log et u doivent être considérés comme des facteurs multipliant, dans l'ordre où ils sont placés, les divers termes du développement de $(1 + \Lambda)^m$.

De même, nous exprimerons la quotience d'un ordre quelconque en fonction des termes u, u_1, u_2, ...

$$(7) \qquad \log \Lambda^n u = \log u_n - \frac{n}{1} \log u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} \log u_{n-2} - \ldots,$$

qu'on peut mettre sous la forme symbolique

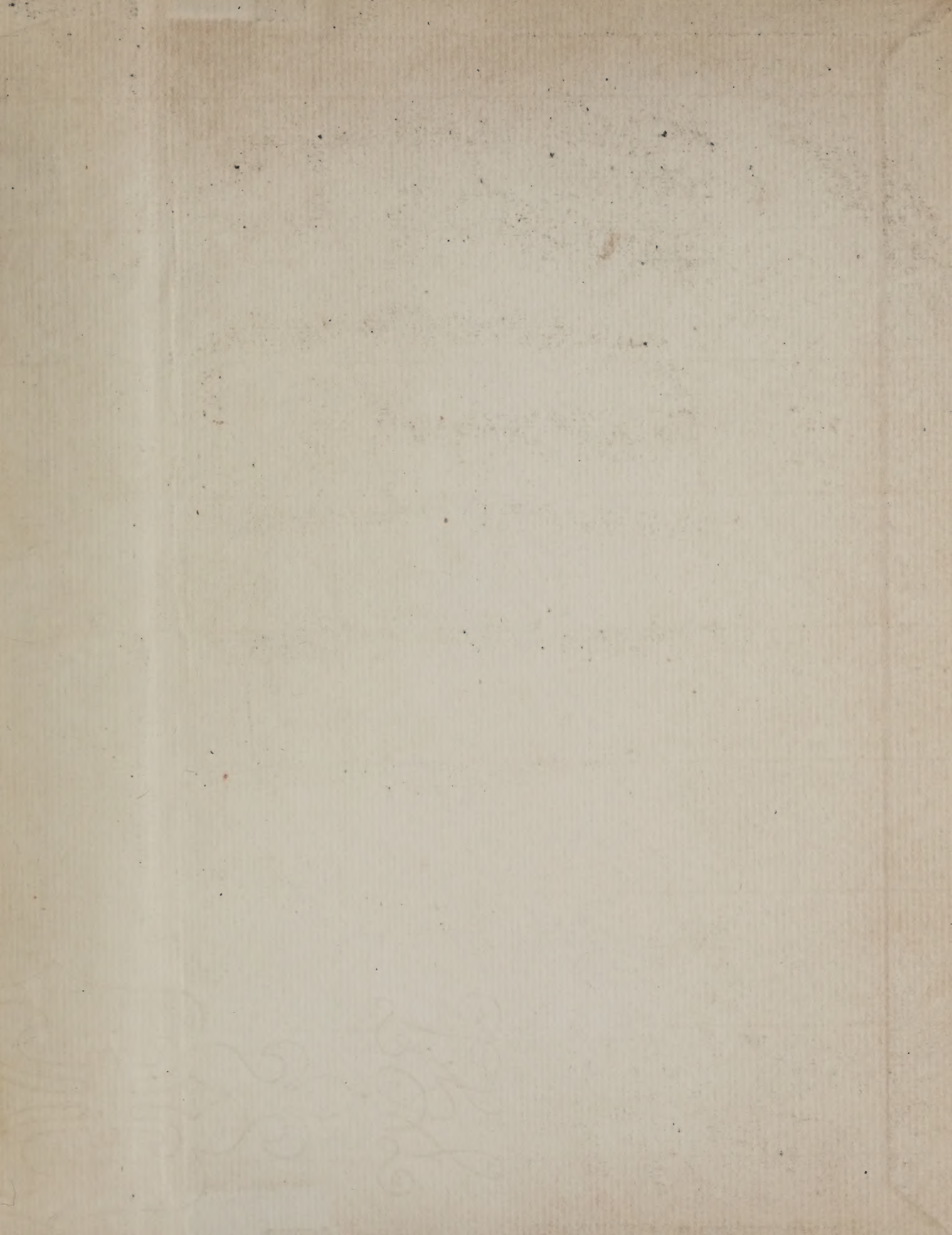
$$\log \Lambda^n u = \log \times (u-1)^n,$$

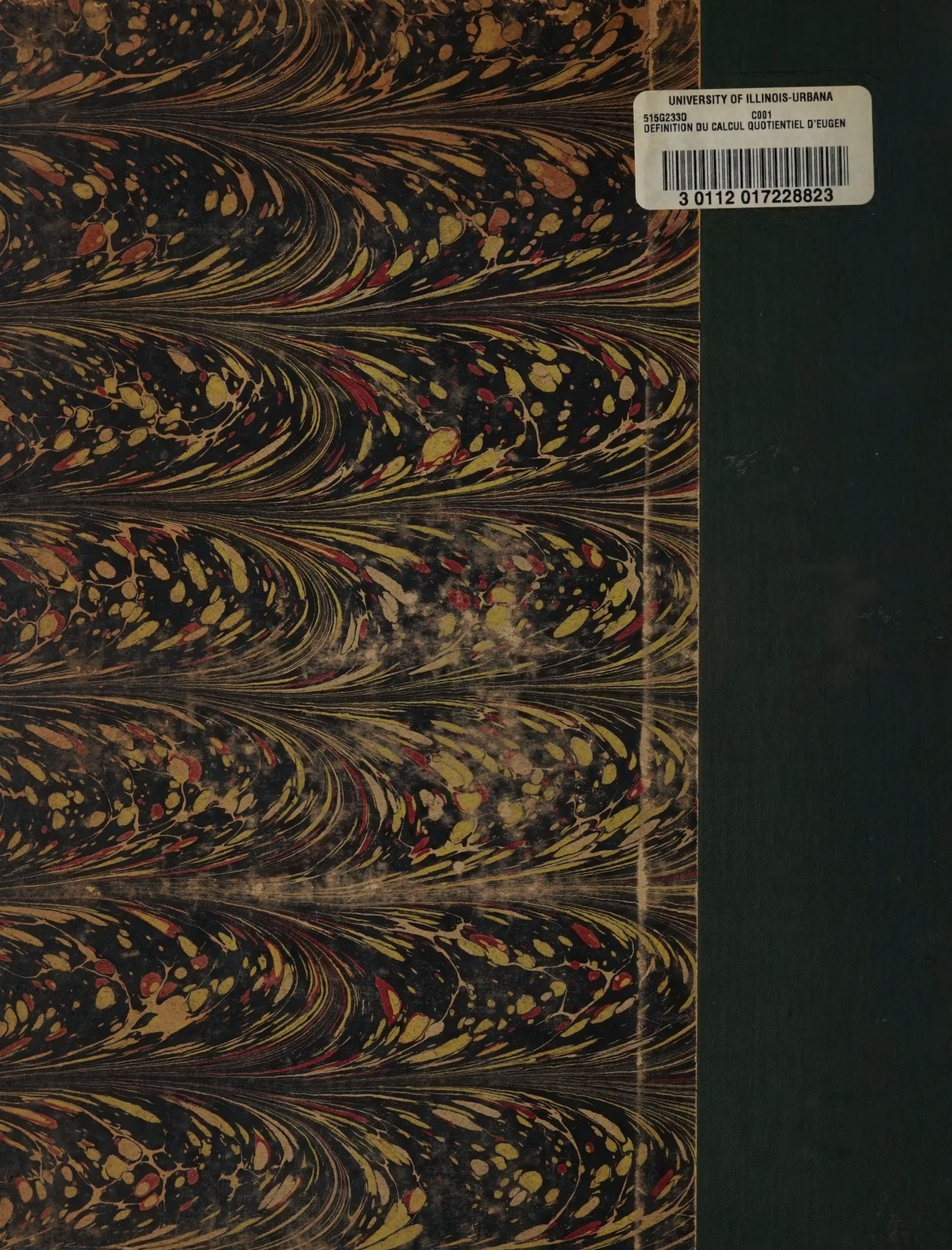
log devant être considéré comme un facteur multipliant la lettre u dont les exposants seront changés en indices.

FIN.

2974 Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.

2974 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.




UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
515G233D C001
DEFINITION DU CALCUL QUOTIENTIEL D'EUGEN
3 0112 017228823